

Colle du 16/09 - Sujet 1
Logique et fonctions réelles

Question de cours.

1. Énoncer les lois de Morgan.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + (-1)^n$.

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $t \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$.
2. En déduire que pour tout $t \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+t) \geq \frac{t}{1+t}$.

Exercice 2. Soit $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$. Montrer que $L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = (-1)^{n+1} 5$.

Colle du 16/09 - Sujet 2
Logique et fonctions réelles

Question de cours.

1. Définir une fonction dérivable en a . Quel est le lien entre continuité et dérivabilité ?
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1. Montrer que pour toute $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ il existe $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\int_0^1 h(t) dt = 0$ et $f = a + h$.

Exercice 2. Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{2e^x + 1}{e^x + 2}\right)$.

Colle du 16/09 - Sujet 3
Logique et fonctions réelles

Question de cours.

1. Définir une fonction paire. Que dire de son graphe ?
2. Résoudre l'équation $(E) : x = \sqrt{3 - 2x}$.

Exercice 1. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$. Montrer l'implication $(a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}) \Rightarrow (a = c \text{ ET } b = d)$.

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x^2+1})}{\sin(\sqrt{x^2+1})}$. Étudier f .